



第十章 复数

10.1 复数及其几何意义

10.1.1 复数的概念

题型诀

1-1. D 【解析】由复数 $z = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$, 得

复数 z 的虚部为 $-\frac{2}{5}$.

1-2. A 【解析】 $-\sqrt{5} + 2i$ 的虚部为 2,
 $\sqrt{5}i + 2i^2 = -2 + \sqrt{5}i$ 的实部为 -2, 所以所求
复数的实部为 2, 虚部为 -2, 即为 $2 - 2i$.

1-3. 2 【解析】因为复数不能比较大
小, 所以 $m - 2 + (m^2 - 4)i$ 为实数, 可得

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0, \\ m - 2 \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } m = 2.$$

2-1. B 【解析】因为 $a(1+i) + b = -i$, 所

以 $a + b + ai = -i$, 则 $\begin{cases} a = -1, \\ a + b = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \end{cases}$ 所

以 $a - b = -2$, 故选 B.

2-2. C 【解析】若 $z_1 = z_2$, 则

$$\begin{cases} m^2 + m + 1 = 3, \\ m - 4 = -3, \end{cases} \text{ 解得 } m = 1,$$

所以“ $m = 1$ ”是“ $z_1 = z_2$ ”的充要条件.

故选 C.

2-3. -1 2 【解析】由题意得

$$\begin{cases} 2x + 8y = 14, \\ x - 6y = -13, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases}$$

3-1. C 【解析】由题意可得

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases} \text{ (提示: 纯虚数实部} = 0, \text{虚}$$

部 $\neq 0$) 解得 $a = 1$, 所以“ $a = 1$ ”是“ z 为纯
虚数”的充要条件. 故选 C.

3-2. A 【解析】因为复数 $z = m^2 - 5m - 6 + 4i$ 为纯虚数, 所以 $m^2 - 5m - 6 = 0$, 解得
 $m = -1$ 或 $m = 6$,

所以实数 m 的值是 -1 或 6. 故选 A.

4-1. 【解】(1) 若 z 是实数, 则 $\tan^2 \theta - \tan \theta - 2 = 0$,

解得 $\tan \theta = -1$ 或 $\tan \theta = 2$.



$$(2) \text{ 若 } z \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} \cos 2\theta = 0, \\ \tan^2 \theta - \tan \theta - 2 \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, \\ (\tan \theta + 1)(\tan \theta - 2) \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \tan^2 \theta = 1, \\ (\tan \theta + 1)(\tan \theta - 2) \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \tan \theta = 1.$$

$$(3) \text{ 若 } z = 0, \text{ 则 } \begin{cases} \cos 2\theta = 0, \\ \tan^2 \theta - \tan \theta - 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{得 } \begin{cases} \cos^2 \theta = \sin^2 \theta, \\ (\tan \theta + 1)(\tan \theta - 2) = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \tan^2 \theta = 1, \\ (\tan \theta + 1)(\tan \theta - 2) = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \tan \theta = -1.$$

5-1. $\sqrt{3}$ 【解析】 $\because z = (2\cos \theta - 1) + (2\sin \theta + \sqrt{3})i$ 为纯虚数,

$$\therefore \begin{cases} 2\cos \theta - 1 = 0, \\ 2\sin \theta + \sqrt{3} \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}, \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}.$$

5-2. 【解】 $\because z$ 总是实数,

$$\therefore k\sin A + \cos A - 1 = 0,$$

$$\text{即 } k = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \text{ 恒成立.}$$

$$\frac{1 - \cos A}{\sin A} = \frac{2\sin^2 \frac{A}{2}}{2\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \tan \frac{A}{2},$$

$$\text{又 } A \in (0, \pi), \therefore \frac{A}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \tan \frac{A}{2} \in (0, +\infty),$$

$$\therefore \frac{1 - \cos A}{\sin A} \in (0, +\infty),$$

\therefore 当 k 的取值范围为 $(0, +\infty)$ 时, 不论 A 为何值, z 总是实数.

巩固练

1. B 【解析】 因为 $x, y \in \mathbf{R}$, 所以由复数

$$\text{相等的充要条件可得 } \begin{cases} x+y = -x-3, \\ x-2y = y-19, \end{cases} \quad \text{解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x = -4, \\ y = 5, \end{cases} \quad \text{所以 } x+yi = -4+5i. \text{ 故选 B.}$$

2. A 【解析】 因为复数 $z = m^2 - 25 +$

$$(m-5)i \text{ 是纯虚数, 则 } \begin{cases} m^2 - 25 = 0, \\ m-5 \neq 0, \end{cases} \quad \text{解}$$



得 $m = -5$. 故选 A.

3. **C** 【解析】由题意得 $zi = 4$, 已知 $i^2 = -1$, 则 $zi^2 = 4i$, 所以 $z = -4i$.

4. **C** 【解析】对于 A, $x = \pm i$, 说法不正确; 对于 B, 实部为零的复数可能虚部也为零, 从而是实数, 说法不正确; 对于 C, 当 $x = i$ 时, $z = (x^2 + 1)i$ 是实数, 说法正确; 对于 D, 复数 $z = 2 + i$ 的虚部是 1, 说法不正确. 故选 C.

5. 【解】(1) 因为 $z = \frac{a^2 - 7a + 6}{a + 1} + (a^2 - 5a - 6)i$ ($a \in \mathbf{R}$) 为实数,

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 - 5a - 6 = 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases} \text{解得 } a = 6,$$

所以当 $a = 6$ 时, z 为实数.

$$(2) \text{ 因为 } z = \frac{a^2 - 7a + 6}{a + 1} + (a^2 - 5a - 6)i$$

($a \in \mathbf{R}$) 为虚数,

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 - 5a - 6 \neq 0, \\ a + 1 \neq 0, \end{cases}$$

解得 $a \neq -1$ 且 $a \neq 6$.

所以当 $a \in (-\infty, -1) \cup (-1, 6) \cup (6, +\infty)$ 时, z 为虚数.

$$(3) \text{ 因为 } z = \frac{a^2 - 7a + 6}{a + 1} + (a^2 - 5a - 6)i$$

($a \in \mathbf{R}$) 为纯虚数,

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 - 5a - 6 \neq 0, \\ a + 1 \neq 0, \\ a^2 - 7a + 6 = 0, \end{cases} \text{解得 } a = 1.$$

所以当 $a = 1$ 时, z 为纯虚数.

6. **D** 【解析】当 $a = c$ 且 $b = d$ 时, 有 $a + bi = c + di$. 所以当 $a = c$ 和 $b = d$ 有一个不成立时, 就有 $a + bi \neq c + di$, 故选 D.

7. **C** 【解析】若题中复数是纯虚数, 则

$$\begin{cases} a^2 - a - 2 = 0, \\ |a - 1| - 1 \neq 0, \end{cases} \text{解得 } a = -1, \text{ 所以当}$$

$a \neq -1$ 时, 题中复数不是纯虚数.

8. **B** 【解析】由题意得 $\cos \alpha = -\cos 2\alpha$,

$$\text{即 } 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0,$$

$$\text{解得 } \cos \alpha = -1 \text{ 或 } \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\because 0 < \alpha < 2\pi, \therefore \alpha = \pi \text{ 或 } \alpha = \frac{\pi}{3} \text{ 或}$$



$$\alpha = \frac{5\pi}{3}.$$

故选 B.

9. D 【解析】 因为 $a+bi=i^2+i$, 所以 $a+$

$$bi = -1+i, \text{ 所以 } \begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \end{cases} \text{ 所以 } a+b=0. \text{ 故}$$

选 D.

10. ABC 【解析】 对于 A, 复数 $z_1 = m^2 - 1 + (m+1)i$ 是纯虚数, 则

$$\begin{cases} m^2 - 1 = 0, \\ m + 1 \neq 0, \end{cases} \text{ 所以 } m = 1, \text{ A 正确;}$$

对于 B, 若 $z_2 = \cos 2\theta + i \sin \theta$ 为实数, 则 $\sin \theta = 0$, 则 $\theta = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, B 正确;

$$\text{对于 C, 若 } z_1 = z_2, \text{ 则 } \begin{cases} m^2 - 1 = \cos 2\theta, \\ m + 1 = \sin \theta, \end{cases} \text{ 则}$$

$$m^2 - 1 = 1 - 2(m+1)^2, \text{ 解得 } m = 0 \text{ 或}$$

$$m = -\frac{4}{3}, \text{ C 正确; 对于 D, 若 } z_1 \geq 0, \text{ 则}$$

$$m^2 - 1 \geq 0, \text{ 且 } m + 1 = 0, \text{ 则 } m = -1, \text{ D 错误. 故选 ABC.}$$

10.1.2 复数的几何意义

易错记

1-1. 【解】 (1) 由向量平移可知 $\overrightarrow{O_1A_1} = \overrightarrow{OA} = (-1, 5)$, \therefore 向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 对应的复数为 $-1+5i$.

(2) 由题意可得点 $A_1(1, 6)$, 故点 A_1 对应的复数为 $1+6i$.

题型诀

1-1. B 【解析】 $z_1 = 3-2i$ 对应的点的坐标为 $(3, -2)$, 因为 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于虚轴对称, 所以 z_2 对应的点的坐标为 $(-3, -2)$, 故 $z_2 = -3-2i$. 故选 B.

1-2. ACD 【解析】 易知选项 A, B, C, D 中的点对应的复数分别为 $3+i, -2, 4i, -1-5i$, 因此 A, C, D 中的点对应的复数为虚数. 故选 ACD.

1-3. 【解】 (1) 当 $m^2 - 2m - 3 = 0$ 且 $m - 3 \neq 0$,

即 $m = -1$ 时, 复数 z 是纯虚数, 虚部为 -4 .

$$(2) \text{ 由题意得 } \begin{cases} m^2 - 2m - 3 > 0, \\ m - 3 < 0, \end{cases} \text{ 解得 } m < -1.$$



所以当 m 的取值范围为 $(-\infty, -1)$ 时, 点 Z 位于第四象限.

(3) 当 $m^2 - 2m - 3 = m - 3$, 即 $m = 0$ 或 $m = 3$ 时, 点 Z 在直线 $y = x$ 上.

2-1. 【解】(1) 设向量 \overrightarrow{OB} 对应的复数为 $z_1 = x_1 + y_1 i$ ($x_1, y_1 \in \mathbf{R}$), 则点 B 的坐标为 (x_1, y_1) . 由题意得 $A(2, 1)$, 点 A 与点 B 关于实轴对称, 则根据对称性可知, $x_1 = 2, y_1 = -1$, 故 $z_1 = 2 - i$. 即向量 \overrightarrow{OB} 对应的复数为 $2 - i$.

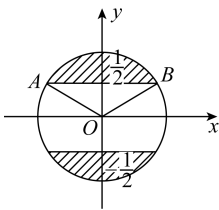
(2) 设点 C 对应的复数为 $z_2 = x_2 + y_2 i$ ($x_2, y_2 \in \mathbf{R}$), 则点 C 的坐标为 (x_2, y_2) . 由 (1) 得 $B(2, -1)$, 点 B 与点 C 关于虚轴对称, 则根据对称性可知, $x_2 = -2, y_2 = -1$, 故 $z_2 = -2 - i$. 即点 C 对应的复数为 $-2 - i$.

3-1. C 【解析】因为 $b - 3i = 4 + ai$ 且 a, b 均为实数, 所以 $a = -3, b = 4$, 所以 $|a + bi| = \sqrt{9 + 16} = 5$. 故选 C.

4-1. AB 【解析】由题意, 因为 $z = 1 + i$, 所以 $|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$, 其对应的点为 $(1, 1)$, 在第一象限, 且其虚部为 1, 其共轭复数为 $1 - i$, 所以选项 A, B 正确, 选项 C, D 错误, 故选 AB.

5-1. 【解】 $\because |z| \leq 1$,

\therefore 复数 z 在复平面内对应的点在一个以原点为圆心, 以 1 为半径的圆面 (包括边界) 内.



又 $\because z$ 的虚部的绝对值不小于 $\frac{1}{2}$,

\therefore 复数 z 在复平面内对应点的集合表示的平面图形如图中阴影部分所示.

$$\because \angle AOB = \frac{2\pi}{3}, \therefore S_{\text{扇形}AOB} = \frac{\pi}{3}.$$

$$\because S_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore \text{图中 } x \text{ 轴上方阴影部分}$$

$$\text{的面积为 } \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{整个阴影部分的面积为 } \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

即复数 z 在复平面内对应点的集合表示



的平面图形的面积是 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6-1. AD 【解析】由 $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$, $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$, 得 $z = \sqrt{2} \left[\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) i \right]$. 当 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$ 时, $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$, 故 $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) > 0$, $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) > 0$, 所以 z 对应的点在第一象限, 故 A 正确;

当 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right)$ 时, $\alpha + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right)$, 故 $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) > 0$, $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) < 0$, 所以 z 对应的点在第四象限, 故 B 错误; 复数 z 的模为 $\sqrt{2}$, 是定值, 故 C 错误, D 正确.

6-2. [0, 1) 【解析】 $\because y = |\cos x - \sin x| = \left| \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \in [0, \sqrt{2}]$,
 $\therefore M = [0, \sqrt{2}]$.
 $\because |\sqrt{2} + xi| < \sqrt{3}$, $\therefore \sqrt{x^2 + 2} < \sqrt{3}$,
 $\therefore -1 < x < 1$, $\therefore N = (-1, 1)$.
 $\therefore M \cap N = [0, 1)$.

6-3. $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 【解析】由题意得 $(x, y) = (1 + \cos \theta, \sin \theta)$, 故 $(x-1)^2 + y^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, 故 (x, y) 的轨迹方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

巩固练

- 1. A** 【解析】由已知可得, $z = 1 + 3i$, 所以在复平面内, 复数 z 对应的点为 $(1, 3)$, 位于第一象限. 故选 A.
- 2. B** 【解析】因为 $A \cap B = \{-1, 1\}$, 所以 $a, b \in \{-1, 1\}$, 所以 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$. 故选 B.
- 3. B** 【解析】由题图得在复平面内, 复数 z 对应的点 Z 的坐标为 $(2, 1)$, 所以 $z = 2 + i$, 因此 $\bar{z} = 2 - i$, 故选 B.
- 4. C** 【解析】对于 A 选项, z 是复数, $|z|$ 是实数, 二者不一定相等, A 选项错误;



对于 B 选项, $|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$, $|1-4i| = \sqrt{1^2+(-4)^2} = \sqrt{17}$,
则 $|2+3i| < |1-4i|$, B 选项错误;

对于 C 选项, $|2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} > -2 = 2i^2$, C 选项正确;

对于 D 选项, $i^2 = -1 < 1 = |-i|$, D 选项错误.

5. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】由题意可得 $m = (3, -3)$,

$n = (0, 7)$, 所以 $\cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} =$

$\frac{-21}{3\sqrt{2} \times 7} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $\langle m, n \rangle \in [0, \pi]$,

所以向量 m, n 的夹角为 $\frac{3\pi}{4}$.

6. 6 【解析】因为复数 $z = 3+2i$, 所以其共轭复数 $\bar{z} = 3-2i$, 所以点 $A(3, 2)$, $B(3, -2)$,

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 3 \times [2 - (-2)] = 6$.

7. A 【解析】因为 $|z|^2 - 2|z| - 3 = 0$, 所以 $(|z| - 3)(|z| + 1) = 0$. 因为 $|z| + 1 \neq 0$, 所以 $|z| = 3$. 故复数 z 在复平面内的对应点的集合表示的图形是以原点为圆心, 以 3 为半径的圆. 故选 A.

8. B 【解析】复数 $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 为纯虚数的充要条件是 $a = 0$ 且 $b \neq 0$, 即与它对应的点 $Z(a, b)$ 为在虚轴上除去原点之外的点.

故由复数 $z = a+bi$ 为纯虚数, 可推出复平面内的点 $Z(a, b)$ 在虚轴上;

由复平面内的点 $Z(a, b)$ 在虚轴上, 不能推出复数 $z = a+bi$ 为纯虚数.

所以“复平面内的点 $Z(a, b)$ 在虚轴上”是“复数 $z = a+bi$ 为纯虚数”的必要不充分条件.

故选 B.

9. 四 【解析】 $z = \cos \frac{2\,021\pi}{3} - i \sin \frac{2\,023\pi}{3} =$

$\cos\left(674\pi - \frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(674\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以其在复



平面内对应的点为 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 位于第四象限.

10. BC 【解析】当 $a=0$ 时, $b=1$, 此时 $z=i$ 为纯虚数, A 错误; 若 z 的共轭复数为 \bar{z} , 且 $z=\bar{z}$, 则 $a+bi=a-bi$, 因此 $b=0$, B 正确; 由 $|z|$ 是实数, 且 $z=|z|$ 知, z 是实数, C 正确; 由 $|z|=\frac{1}{2}$ 得 $a^2+b^2=\frac{1}{4}$, 又 $a+b=1$, 因此 $8a^2-8a+3=0$, $\Delta=64-4\times 8\times 3=-32<0$, 无解, 即 $|z|$ 不可以等于 $\frac{1}{2}$, D 错误. 故选 BC.

11. 【解】(1) 若选①: $z>0$,

$$\text{则} \begin{cases} m^2-m-6>0, \\ m^2-9=0, \end{cases} \text{解得 } m=-3.$$

若选②: z 的实部与虚部互为相反数, 则 $m^2-m-6+m^2-9=0$,

$$\text{解得 } m=3 \text{ 或 } m=-\frac{5}{2}.$$

若选③: z 为纯虚数,

$$\text{则} \begin{cases} m^2-m-6=0, \\ m^2-9\neq 0, \end{cases} \text{解得 } m=-2.$$

(2) 因为 $|z|=10$,

$$\text{所以 } (m^2-m-6)^2+(m^2-9)^2=100,$$

$$\text{即 } (m-3)^2(2m^2+10m+13)=100.$$

因为 m 为整数,

所以 $(m-3)^2$ 为平方数, $2m^2+10m+13$ 为奇数.

又因为 $100=10^2\times 1$ 或 $100=2^2\times 25$,

所以验证可得 $m-3=-2$, 即 $m=1$.

因为 $m=1$, 所以 $z=-6-8i$, 所以 z 在复平面内对应点的坐标为 $(-6, -8)$.

10.2 复数的运算

10.2.1 复数的加法与减法

题型诀

1-1. 【解】(1) 原式 $=(-1+4i)+(2-3i)=1+i$.

(2) 原式 $=(3-6i)+(3+4i)=6-2i$.

(3) 原式 $=(-2a+5bi)+5i=-2a+(5b+5)i$.



5) i.

2-1. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, 所以向量 \overrightarrow{AB} 对应的复数为 $(-3+2i) - (2-3i) = -5+5i$, 故选 B.

2-2. 5-2i 【解析】依题意得 $A(0,0)$, $B(3,2)$, $D(2,-4)$, $\overrightarrow{AB} = (3,2)$, $\overrightarrow{AD} = (2,-4)$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (3,2) + (2,-4) = (5,-2)$, 故 C 点对应的复数为 $5-2i$.

3-1. C 【解析】设 $z_1 = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 因为 $|z_1| = 2$, 所以 $a^2 + b^2 = 4$.

因为复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点分别为 Z_1, Z_2 , $z_2 = 3i$, 所以 $Z_1(a, b), Z_2(0, 3)$,

所以 $|Z_1Z_2| = \sqrt{(a-0)^2 + (b-3)^2} = \sqrt{13-6b}$,

故当 $b = -2$ 时, $|Z_1Z_2|$ 取得最大值, 最大值为 $\sqrt{13+12} = 5$, 故选 C.

3-2. [1, 3] 【解析】 $|z| = 1$ 表示 z 对应的点是单位圆上的点. $|z-2i|$ 的几何意义表示单位圆上的点与 $(0, 2)$ 之间的距离, 所以最小距离为 $2-1=1$, 最大距离为 $2+1=3$. 所以 $|z-2i|$ 的取值范围为 $[1, 3]$. 故答案为 $[1, 3]$.

3-3. 【解】 设复数 z_1, z_2, z_1+z_2 在复平面内对应的点分别是 Z_1, Z_2, Z ,

向量 $\overrightarrow{OZ_1}, \overrightarrow{OZ_2}$ 的夹角为 α , 则向量 $\overrightarrow{Z_1O}, \overrightarrow{Z_1Z}$ 的夹角为 $\pi-\alpha$.

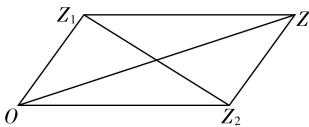
在 $\triangle OZZ_1$ 中, $\cos(\pi-\alpha) =$

$$\frac{|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1+z_2|^2}{2 \cdot |z_1| \cdot |z_2|} = -\frac{1}{15},$$

$$\text{即 } \cos \alpha = \frac{1}{15}.$$

在 $\triangle OZ_1Z_2$ 中, $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| \cos \alpha = 32$,

$$\therefore |z_1 - z_2| = 4\sqrt{2}.$$



4-1. ABD 【解析】对 A, B, $|z_1| =$

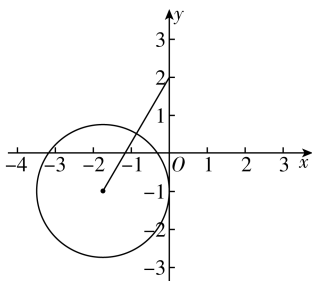


$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2, |z_2|=\sqrt{x^2+y^2}$, 故 A, B 正确;

对 C, $z_1=\sqrt{3}+i$ 对应复平面内点 $Z_1(\sqrt{3}, 1), z_2=x+yi$ 对应的复平面内点 $Z_2(x, y)$, 因为 $\overrightarrow{OZ_1} \parallel \overrightarrow{OZ_2}$, 所以 $\sqrt{3}y-x=0$, 故 C 错误;

对 D, 若 $|z_2+z_1| \leq \sqrt{3}$, 即 $|(x+\sqrt{3})+(y+1)i| \leq \sqrt{3}$, 得 z_2 在复平面内对应的点 (x, y) 是在以 $(-\sqrt{3}, -1)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆上及圆内, 又 $|z_2-2i|$ 的几何意义为点 (x, y) 到 $(0, 2)$ 的距离, 故 $|z_2-2i|$ 的最大值为 $\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(-1-2)^2}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$, 故 D 正确.

故选 ABD.



4-2. 直角三角形 【解析】设复数 z_1+z_2 对应的点为 Z , 则四边形 OZ_1ZZ_2 为平行四边形.

又 $\because |z_1+z_2|=|z_1-z_2|$, 即 $|OZ|=|Z_1Z_2|$,
 \therefore 四边形 OZ_1ZZ_2 为矩形,
 $\therefore OZ_1 \perp OZ_2, \therefore \triangle OZ_1Z_2$ 是直角三角形.

巩固练

1. D 【解析】因为 $(a+3i)+(2-i)=5+bi$, 即 $(a+2)+2i=5+bi$, 所以

$$\begin{cases} a+2=5, \\ b=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=3, \\ b=2, \end{cases}$$

所以 $a+b=5$. 故选 D.

2. D 【解析】依题意, 得 $(-3+i)-(5-i)+(2+5i)=-6+7i$, 所以 $|-6+7i|=\sqrt{(-6)^2+7^2}=\sqrt{85}$. 故选 D.

3. B 【解析】由复数 $(1+2i)-(3-4i)=-2+6i$, 可得复数在复平面内对应的点 $(-2, 6)$ 位于第二象限. 故选 B.

4. C 【解析】因为 $z_1 \in \mathbf{R}$, 所以可设 $z_1=a$, 且 $a \in \mathbf{R}$. 由 $z_2=1+i$, 得 $z_1-z_2=(a-$

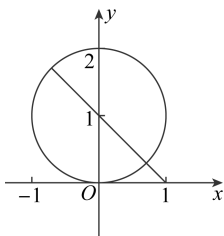


1) $-i$.

因为 $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$, 所以 $(a-1)^2 + (-1)^2 = 2$, 解得 $a=0$ 或 $a=2$, 所以 $z_1 = 0$ 或 $z_1 = 2$.

5. **B** 【解析】由 $|z-1| = |z+1|$, 知 z 在复平面内对应的点 Z 的集合是以点 $(1, 0)$, $(-1, 0)$ 为端点的线段的垂直平分线, 即虚轴.

6. $\sqrt{2}+1$ 【解析】因为 $|z-i|=1$, 所以复数 z 在复平面内对应的点的集合表示以 $(0, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆, 如图所示.



则 $|z-1|$ 的最大值为圆心 $(0, 1)$ 到点 $(1, 0)$ 的距离加 1, 即 $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} + 1 = \sqrt{2} + 1$.

7. **C** 【解析】因为 $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$, 所以 $\overrightarrow{OZ_1} \perp \overrightarrow{OZ_2}$, 故 $\triangle OZ_1Z_2$ 是直角三角形,

所以 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |\overrightarrow{OZ_1}|^2 + |\overrightarrow{OZ_2}|^2 = |\overrightarrow{Z_1Z_2}|^2 = 4|\overrightarrow{OZ}|^2$. 易知 $|\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, 所以 $4|\overrightarrow{OZ}|^2 = 4 \times 25 = 100$.

8. **D** 【解析】 $|z_1 - z_2| = |(1 + i\cos \theta) - (\sin \theta - i)| = \sqrt{(1 - \sin \theta)^2 + (1 + \cos \theta)^2}$

$$= \sqrt{3 - 2(\sin \theta - \cos \theta)}$$

$$= \sqrt{3 - 2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\leq \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1,$$

当且仅当 $\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\theta =$

$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 时取等号, 故 $|z_1 - z_2|$ 的

最大值为 $\sqrt{2} + 1$.

9. **C** 【解析】因为 $|z - 4i| = |z + 2|$, 所以 $|x + (y - 4)i| = |(x + 2) + yi|$, 所以 $x^2 + (y - 4)^2 = (x + 2)^2 + y^2$, 即 $x + 2y = 3$, 所以 $2^x + 4^y = 2^x + 2^{2y} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{2y}} =$



$2\sqrt{2^{x+2y}} = 2\sqrt{2^3} = 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $x = \frac{3}{2}, y = \frac{3}{4}$ 时取等号, 即 $2^x + 4^y$ 取得最小值 $4\sqrt{2}$.

10. A 【解析】 $\because |z+3i| + |z-3i| = 6$,

\therefore 复数 z 在复平面内对应的点 Z 到点 $A(0, -3)$ 与到点 $B(0, 3)$ 的距离之和为 6.

又 $\because |AB| = 6, \therefore$ 点 Z 的轨迹为线段 AB , 从而 $|z+1+i| = |z-(-1-i)|$ 表示线段 AB 上的点到点 $C(-1, -1)$ 的距离,

数形结合, 得点 $C(-1, -1)$ 到线段 AB 的最短距离为 1, $\therefore |z+1+i|$ 的最小值是 1.

11. 2-i 【解析】 设正方形 $ABCD$ 的三个

顶点对应的复数分别为 $1+2i, -2+i,$

$-1-2i$, 则 $\overrightarrow{OA} = (1, 2), \overrightarrow{OB} = (-2, 1),$

$\overrightarrow{OC} = (-1, -2)$, 设 $\overrightarrow{OD} = (a, b),$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -3-i, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} -$

$\overrightarrow{OB} = 1-3i,$

$1 \times (-3) + (-1) \times (-3) = 0, \therefore AB \perp$

BC , 由题意得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, 即 $-3-i = \overrightarrow{OC} -$

$\overrightarrow{OD} = -1-2i - (a+bi),$

$$\therefore \begin{cases} -2-b=-1, \\ -1-a=-3, \end{cases} \therefore \begin{cases} a=2, \\ b=-1, \end{cases}$$

$\therefore \overrightarrow{OD} = (2, -1),$

即第四个复数是 $2-i$.

12. ABD 【解析】 依题意可得 $A(-3,$

$4), B(1, 7), C(3, -4)$, 对于 A, 点 B

在第一象限, 故 A 正确;

对于 B, 点 A 与点 C 关于原点 O 对

称, 故 B 正确; 对于 C, 因为 $\overrightarrow{OA} =$

$(-3, 4), \overrightarrow{OB} = (1, 7), \cos \angle AOB =$

$$\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{-3+28}{5 \times 5\sqrt{2}} > 0, \text{ 所以 } \angle AOB$$

不是钝角, 故 C 错误; 对于 D, 因为

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (1, 7) + (3, -4) = (4, 3),$

$\overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = -3 \times 4 + 4 \times 3 = 0,$ 所

以 $\overrightarrow{OA} \perp (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, 故 D 正确. 故

选 ABD.

10.2.2 复数的乘法与除法

易错记

1-1. 【解】 设 x_0 是方程的实数根, 代入方

程并整理, 得 $x_0^2 - 6x_0 + 9 + (a - x_0)i = 0,$



$$\text{所以} \begin{cases} x_0^2 - 6x_0 + 9 = 0, \\ a - x_0 = 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a = x_0 = 3.$$

题型诀

1-1. D 【解析】因为在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-2, 1)$, 所以 $z = -2 + i$, 所以 $zi = (-2 + i) \times i = -2i + i^2 = -2i - 1 = -1 - 2i$, 故 zi 的虚部为 -2 . 故选 D.

1-2. 【解】 (1) $(1 + 3i)(4 - i) = 7 + 11i$.

(2) $(2 + i)(1 - i)(3 + 4i) = (3 - i)(3 + 4i) = 13 + 9i$.

$$(3) \frac{2 - 3i}{1 + i} = \frac{(2 - 3i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - 5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i.$$

1-3. 【解】 (1) 将 $z = 2 - ai$ 代入 $(1 - 2i)z$, 得 $(1 - 2i)(2 - ai) = 2 - 2a - (a + 4)i$.

$$\because (1 - 2i)z \text{ 为纯虚数}, \therefore \begin{cases} 2 - 2a = 0, \\ a + 4 \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$a = 1,$$

所以复数 $z = 2 - i$.

(2) 由 (1) 知 $z = 2 - i$,

$$\therefore \omega = \frac{z}{3 + i} = \frac{2 - i}{3 + i} = \frac{(2 - i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{5 - 5i}{10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$|\omega| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2-1. B 【解析】由虚数单位 i 的性质可知 $i^8 = 1$,

故由 $a + bi = i^8(2 - i)$ 可得 $a + bi = 2 - i$,

故 $a = 2, b = -1, \therefore a + b = 1$.

故选 B.

$$\mathbf{2-2. (1) -1 \quad (2) \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$

$$\mathbf{【解析】} (1) \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^6 = i^6 = -1.$$

(2) 因为 $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$,

而 $2\,021 = 4 \times 505 + 1$,

所以 $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{2\,021} = i$, 则 $z = \frac{i}{1-i} =$

$$\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ 故 } z \text{ 在复平面内}$$

对应的点的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3-1. A 【解析】由题意得 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $\bar{z} = x - yi$, $(z - i)(\bar{z} + i) = [x + (y - 1)i][x - (y - 1)i] = x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

故选 A.



3-2. B 【解析】因为 $z = \frac{i}{3-i} =$

$$\frac{i(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{-1+3i}{10} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i, \text{ 所以 } \bar{z} =$$

$$-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i, \text{ 所以 } z - \bar{z} = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i -$$

$$\left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right) = \frac{3}{5}i, \text{ 所以 } z - \bar{z} \text{ 的虚部为}$$

$$\frac{3}{5}, \text{ 故选 B.}$$

3-3. 【解】(1) 由复数 $z = (1+i)^2 + 1 - 3i =$

$$2i + 1 - 3i = 1 - i, \text{ 所以 } |z| = |1 - i| =$$

$$\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

(2) 由(1)知 $z = 1 - i$, 可得 $\bar{z} = 1 + i$.

$$\text{由 } z^2 + b\bar{z} + a = z, \text{ 可得 } (1-i)^2 + b(1+i) + a =$$

$$1-i, \text{ 即 } a+b+(b-2)i=1-i,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a+b=1, \\ b-2=-1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=0, \\ b=1. \end{cases}$$

4-1. D 【解析】因为复数 $z_1 z_2 \neq 0$, 所以

z_1, z_2 是非零复数.

当 $z_2 = \bar{z}_1$ 时, 复数 z_1, z_2 互为共轭复数, 故

$$z_1 z_2 = z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2, |z_1 z_2| = |z_1 \cdot \bar{z}_1| =$$

$$|z_1|^2, \text{ 所以 } z_1 z_2 = |z_1 z_2|; \text{ 当 } z_1 z_2 = |z_1 z_2|$$

时, 若 z_1, z_2 是正实数, 则不一定能得出

$z_2 = \bar{z}_1$, 则“ $z_1 z_2 = |z_1 z_2|$ ”是“ $z_2 = \bar{z}_1$ ”成立的

必要不充分条件. 故选 D.

4-2. BC 【解析】 z_1 与 z_2 是共轭虚数,

可设 $z_1 = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}, b \neq 0$), 则 $z_2 =$

$$a - bi.$$

对于 A 选项, 当 $ab \neq 0$ 时, $z_1^2 = a^2 - b^2 +$

$$2abi, |z_2|^2 = a^2 + b^2, z_1^2 \text{ 和 } |z_2|^2 \text{ 不能比较}$$

大小, 故 A 选项错误;

对于 B 选项, $z_1 z_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 +$

$$b^2 = |z_1 z_2|, \text{ 故 B 选项正确;}$$

对于 C 选项, $z_1 + z_2 = (a + bi) + (a - bi) = 2a \in$

\mathbf{R} , 故 C 选项正确;

对于 D 选项, 若 $ab \neq 0$, 则 $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{a-bi} =$

$$\frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2} \notin \mathbf{R}, \text{ 故 D 选项}$$

错误.

5-1. BCD 【解析】由 $\Delta = a^2 - 4 < 0$, 得

$-2 < a < 2$, A 错误; 因为原方程的根为 $x =$



$\frac{-a \pm \sqrt{4-a^2}i}{2}$, 所以 z_1 的共轭复数是 z_2 , B

正确; $z_1 z_2 = \frac{-a + \sqrt{4-a^2}i}{2} \times \frac{-a - \sqrt{4-a^2}i}{2} =$

1, C 正确; 因为 $z_1 + \frac{a}{2}$ 等于 $\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$ 或

$-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}i$, 所以 $z_1 + \frac{a}{2}$ 为纯虚数, D 正

确. 故选 BCD.

5-2. 【解】 (1) $\overline{z_2} = 2+ai$,

$\overline{z_1 + z_2} = (a+2) + (a+3)i$,

因为 $z_1 + \overline{z_2}$ 在复平面内对应的点落在第一象限,

所以 $\begin{cases} a+2 > 0, \\ a+3 > 0, \end{cases}$ 解得 $a > -2$,

即实数 a 的取值范围为 $(-2, +\infty)$.

(2) 因为复数 z_1 是实系数一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 的根,

所以复数 $\overline{z_1} = a - 3i$ 也是一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 的根,

则 $z_1 + \overline{z_1} = 2a = 6, z_1 \cdot \overline{z_1} = a^2 + 9 = m$,

所以 $a = 3, m = 18$.

6-1. 【解】 设方程的实数根为 $x = m$, 则

$(2+i) \cdot m^2 - am + 1 = 4i$, 即 $m^2 i + 2m^2 - am + 1 = 4i$. 根据复数相等的充要条件, 得

$\begin{cases} m^2 = 4, \\ 2m^2 - am + 1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m = 2, \\ a = \frac{9}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m = -2, \\ a = -\frac{9}{2}. \end{cases}$

\therefore 当实数 $a = \frac{9}{2}$ 时, 实数根为 2; 当实数

$a = -\frac{9}{2}$ 时, 实数根为 -2.

7-1. 3-i 【解析】 由题意得 $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ z & zi \end{vmatrix} =$

$zi + z = 4 + 2i$, 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $zi +$

$z = (a + bi)i + a + bi = (a - b) + (a + b)i = 4 + 2i$,

所以 $\begin{cases} a - b = 4, \\ a + b = 2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = -1, \end{cases}$

所以 $z = 3 - i$.

巩固练

1. A 【解析】 $z = i(3 - 2i) = 3i - 2i^2 = 2 + 3i$,

$\therefore \bar{z} = 2 - 3i$. 故选 A.

2. A 【解析】 由题意, 复数 $z = \frac{1-7i}{1+i} =$



$$\frac{(1-7i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -3-4i, \text{ 可得 } |z| =$$

$\sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = 5$, 所以 A 正确; 复数 z 在复平面上对应的点 $(-3, -4)$ 位于第三象限, 所以 B 错误; 复数 $z = -3-4i$ 的实部为 -3 , 虚部为 -4 , 可得实部与虚部之积为 12 , 所以 C 错误; 复数 $z = -3-4i$ 的共轭复数为 $\bar{z} = -3+4i$, 所以 D 错误. 故选 A.

3. **D** 【解析】对于 A, 由 $x^2+1=0$, 得 $x^2 = -1$. $\because x \in \mathbf{C}, \therefore$ 令 $x = a+bi, a, b \in \mathbf{R}$,

$$\therefore x^2 = (a+bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi,$$

$$\text{则} \begin{cases} a^2 - b^2 = -1, \\ 2ab = 0, \end{cases}$$

解得 $a=0, b^2=1, \therefore b=\pm 1$, 即 $x=\pm i$. 故 A 错误.

对于 B, 设 $z_1 = a_1+b_1i, z_2 = a_2+b_2i, a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbf{R}$,

$$\text{则 } z_1^2+z_2^2 = (a_1+b_1i)^2 + (a_2+b_2i)^2 = 0, \text{ 得}$$

$$a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2=0, \text{ 且 } 2(a_1b_1+a_2b_2)=0,$$

当 $a_2=-b_1, a_1=b_2$ 时成立, 故 B 错误.

对于 C, 设 $z = mi, m \in \mathbf{R}, m \neq 0, |z|^2 = m^2, z^2 = (mi)^2 = -m^2, \therefore |z|^2 \neq z^2$, 故 C 错误.

对于 D, 由复数 z 满足 $z(2+i) = |3-4i| = 5$, 得 $z = \frac{5}{2+i} = 2-i$,

$$\therefore \text{复数 } z \text{ 的虚部为 } -1, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 D.

4. **C** 【解析】因为 $2+ai, b+i$ (i 是虚数单位) 是实系数一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根, 所以

$$\begin{cases} 2+ai+b+i = -p, \\ (2+ai)(b+i) = q, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} 2+b = -p, \\ a+1 = 0, \\ 2b-a = q, \\ 2+ab = 0, \end{cases} \text{ 解得} \begin{cases} a = -1, \\ b = 2, \\ p = -4, \\ q = 5. \end{cases}$$

故选 C.

5. **$7\sqrt{2}$** 【解析】由条件可知, $(1-2i)^2 + a(1-2i) + b = 0$, 整理为 $(a+b-3) - (4+2a)i = 0$, 则

$$\begin{cases} a+b-3=0, \\ 4+2a=0, \end{cases} \text{ 解得} \begin{cases} a=-2, \\ b=5, \end{cases} \text{ 故}$$

$a+bi = -2+5i$, 在复平面内对应的点为



$(-2, 5)$, $ai+b=5-2i$, 在复平面内对应的点为 $(5, -2)$, 两点间的距离 $d = \sqrt{(-2-5)^2 + (5+2)^2} = 7\sqrt{2}$.

6. **D** 【解析】 $\because z = \frac{a+i}{2+i} = \frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2a+1}{5} + \frac{2-a}{5}i$,

其在复平面内对应的点位于第一象限,

$$\therefore \begin{cases} 2a+1 > 0, \\ 2-a > 0, \end{cases} \text{解得 } -\frac{1}{2} < a < 2.$$

\therefore 实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

故选 D.

7. **C** 【解析】设 $z = a+bi$ ($a \in \mathbf{R}$), 因为复数 z 是关于 x 的方程 $x^2 - 4x + b = 0$ ($b \in \mathbf{R}$) 的一个根, 所以 $(a+bi)^2 - 4(a+bi) + b = 0$, 即 $(a^2 - 1 - 4a + b) + (2a - 4)i = 0$,

$$\text{所以 } \begin{cases} a^2 - 1 - 4a + b = 0, \\ 2a - 4 = 0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 5. \end{cases}$$

所以 $z = 2+i$, 则 $|z+2-2i| = |2+i+2-2i| = |4-i| = \sqrt{17}$. 故选 C.

8. 【解】(1) 设 $z = c+di$ ($c < 0, d < 0, c, d \in \mathbf{R}$), 则 $z^2 = (c+di)^2 = c^2 - d^2 + 2cdi = 3+4i$,

$$\therefore \begin{cases} c^2 - d^2 = 3, \\ 2cd = 4, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} c = -2, \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} c = 2, \\ d = 1 \end{cases} \text{ (舍)}, \therefore z = -2-i.$$

$$(2) \because \bar{z} = -2+i, \therefore \frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{-1-i}{-1+i} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i,$$

$$\therefore \left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^{2019} = i^{2019} = i^{504 \times 4 + 3} = i^3 = -i.$$

9. **AD** 【解析】当 $k = 2n, n \in \mathbf{Z}$ 时, $z =$

$$\frac{1+i^{4n+1}}{2+i} = \frac{1+i}{2+i} = \frac{(1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{3+i}{5}, \text{ 对应}$$

的点在第一象限; 当 $k = 2n+1, n \in \mathbf{Z}$

$$\text{时, } z = \frac{1+i^{4n+3}}{2+i} = \frac{1-i}{2+i} = \frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$\frac{1-3i}{5}, \text{ 对应的点在第四象限. 故选 AD.}$$

10. **ABD** 【解析】对于 A, 由 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 得 $e^{ix} + 1 = \cos x + i \sin x + 1$ 不一



定为 0, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{4} = -1, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{对于 C, } \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{3}+i} = \frac{\cos \pi + i \sin \pi}{\sqrt{3}+i} = -\frac{1}{\sqrt{3}+i} =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i, \text{ 所以 } \frac{e^{i\pi}}{\sqrt{3}+i} \text{ 的模为}$$

$$\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, } \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} =$$

$$\frac{\cos x + i \sin x + \cos(-x) + i \sin(-x)}{2} =$$

$\cos x$, 故 D 错误.

* 10.3 复数的三角形式 及其运算

题型诀

$$\mathbf{1-1. A} \quad \text{【解析】} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$= \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

1-2. 【解】 (1) $r=1$, 对应的点在 x 轴的正半轴上, 所以 $\arg 1 = 0$. 所以 $1 = \cos 0 + i \sin 0$.

(2) $r=2$, 对应的点在 y 轴的负半轴上, 所以 $\arg(-2i) = \frac{3\pi}{2}$. 所以 $-2i =$

$$2\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

$$(3) -2\left(\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, \\ r=2,$$

对应的点在第二象限, 且 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以取 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$$\text{所以 } -2\left(\sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(\cos \frac{3\pi}{4} +$$



$$\text{isin } \frac{3\pi}{4} \Bigg) .$$

$$\mathbf{1-3. 【解】} (1) z_1 = 2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \text{isin} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 2 \times 0 + 2 \cdot i \cdot (-1) = -2i.$$

$$(2) z_2 = 5(\cos 135^\circ + \text{isin } 135^\circ)$$

$$= 5 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 5 \times \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$= -\frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2} i.$$

$$\mathbf{2-1. D 【解析】} \text{复数 } \cos \frac{\pi}{4} - \text{isin } \frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i = \cos \frac{7\pi}{4} + \text{isin } \frac{7\pi}{4}, \text{ 所以复数}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} - \text{isin } \frac{\pi}{4} \text{ 的辐角主值是 } \frac{7\pi}{4}. \text{ 故}$$

选 D.

$$\mathbf{2-2. \pi 【解析】} \text{因为 } e^{i\theta} = \cos \theta + \text{isin } \theta,$$

$$\text{所以 } e^{3i\pi} = \cos 3\pi + \text{isin } 3\pi = \cos \pi + \text{isin } \pi,$$

$$\text{所以 } e^{3i\pi} \text{ 的辐角主值为 } \pi.$$

$$\mathbf{2-3. 【解】} \text{由 } (z+1)(\bar{z}+1) = |z|^2 \text{ 得 } z\bar{z} + z + \bar{z} + 1 = |z|^2.$$

$$\because z\bar{z} = |z|^2, \therefore z + \bar{z} + 1 = 0, \therefore z + \bar{z} = -1,$$

$$\text{由 } \frac{z-1}{z+1} \text{ 是纯虚数得 } \overline{\frac{z-1}{z+1}} + \frac{z-1}{z+1} = 0,$$

$$\therefore \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} + \frac{z-1}{z+1} = 0,$$

$$\therefore \frac{\bar{z}z - z + \bar{z} - 1 + z\bar{z} - \bar{z} + z - 1}{(\bar{z}+1)(z+1)} = 0,$$

$$\therefore 2z\bar{z} = 2, \therefore z\bar{z} = 1.$$

于是 z, \bar{z} 是方程 $x^2 + x + 1 = 0$ 的两根, 解得

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, \therefore z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

$$\text{当 } z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ 时, } z \text{ 的辐角主值为 } \frac{2\pi}{3};$$

$$\text{当 } z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ 时, } z \text{ 的辐角主值为 } \frac{4\pi}{3}.$$

$$\mathbf{3-1. 1 【解析】} \text{因为 } z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i =$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \text{isin } \frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } z^{17} + z = z(z^{16} + 1) = \left(\cos \frac{\pi}{3} + \right.$$

$$\text{isin } \frac{\pi}{3} \Bigg) \left(\cos \frac{16\pi}{3} + \text{isin } \frac{16\pi}{3} + 1 \right),$$

$$\text{而 } \cos \frac{16\pi}{3} + \text{isin } \frac{16\pi}{3} + 1 = \cos \frac{4\pi}{3} + \text{isin } \frac{4\pi}{3} +$$



$$1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3},$$

$$\text{所以 } z^{17} + z = \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot$$

$$\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

3-2. 【解】 $z_2 = 2(\cos 150^\circ - i \sin 150^\circ) = 2[\cos(-150^\circ) + i \sin(-150^\circ)]$, $\therefore z_1 z_2 = 8 \times 2[\cos(240^\circ - 150^\circ) + i \sin(240^\circ - 150^\circ)] = 16(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 16i$.

4-1. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 【解析】 因为复数 $z = \cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}$ 是方程 $x^5 - \alpha = 0$ 的一个根,

$$\text{所以 } \alpha = z^5 = \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^5 =$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

5-1. 【解】 $4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \div$

$$\left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 2 \left[\cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i.$$

5-2. 【解】 $\because 1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$,

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right),$$

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$-1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right),$$

$$-1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$\therefore \frac{(1 + \sqrt{3}i)(-\sqrt{3} + i)(1 + i)}{(-1 - i)^2(-1 + i)}$$

$$= \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right] \cdot \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \div$$

$$\left\{ \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right]^2 \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right] \right\}$$



$$\begin{aligned}
&= \left\{ 2 \times 2 \times \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} \div \left\{ (\sqrt{2})^2 \times \sqrt{2} \times \right. \\
&\quad \left[\cos \left(2 \times \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(2 \times \frac{5\pi}{4} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{3\pi}{4} \right) \right] \left. \right\} \\
&= \frac{2 \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)}{\cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4}} \\
&= 2 \left[\cos \left(\frac{17\pi}{12} - \frac{13\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{12} - \frac{13\pi}{4} \right) \right] \\
&= 2 \left[\cos \left(-\frac{11\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{11\pi}{6} \right) \right] \\
&= \sqrt{3} + i.
\end{aligned}$$

6-1. 【解】依题意知 $(-1 + \sqrt{3}i) \cdot$

$$\begin{aligned}
&\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{z_2}{\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}}. \\
\therefore z_2 &= (-1 + \sqrt{3}i) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \cdot \\
&\quad \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\
&= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{4\pi}{3} + \right. \\
&\quad \left. i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\
&= 2 \left[\cos \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{3\pi}{4} \right) \right] \\
&= 2 \left(\cos \frac{11\pi}{4} + i \sin \frac{11\pi}{4} \right) \\
&= -\sqrt{2} + \sqrt{2}i.
\end{aligned}$$

巩固练

1. B 【解析】 $-1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) =$
 $2 \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right]$. 故选 B.

2. D 【解析】 $\sin 4 + i \cos 4 = \cos \left(\frac{5\pi}{2} - 4 \right) +$
 $i \sin \left(\frac{5\pi}{2} - 4 \right).$

3. C 【解析】 $\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \times$
 $3 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 3 \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} + \right. \right.$



$$\left. \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \Big] = 3 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

4. **B** 【解析】由题可知 $z_1 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$, $z_2 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, 所以 $z_2 z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, 所以 $\arg(z_2 z_1) = \frac{\pi}{6}$.

5. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】因为 $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $2iz = z_1$, 所以 $z = \frac{-\sqrt{3} + i}{2i} = \frac{(-\sqrt{3} + i)(-i)}{2i(-i)} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, 所以复数 z 的辐角主值为 $\frac{\pi}{3}$.

6. $1-i$ 【解析】 $(1+i) \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left[\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] = 1-i.$

7. **B** 【解析】因为 $z = (a+i)^2 = (a^2-1) + 2ai$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a<0, \end{cases}$ 所以 $a = -1$, 故选 B.

8. **C** 【解析】由题意, 得 $\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$. 由复数相等的定义,

$$\text{得} \begin{cases} \cos \frac{n\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \\ \sin \frac{n\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \frac{n\pi}{3} = 2k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{N}_+),$$

$$\therefore n = 6k - 1 (k \in \mathbf{N}_+).$$

9. $2\sqrt{3} - 2i$ 4 【解析】 $z = 2 \div \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] = 2(\cos 0 +$



$$\begin{aligned}
 & i \sin 0) \div \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\
 & 4 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{3} - \\
 & 2i, \text{ 则 } |z| = |2\sqrt{3} - 2i| = \\
 & \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = \sqrt{16} = 4.
 \end{aligned}$$

10. 【证明】 (1) 左边 $= \cos(75^\circ + 15^\circ) + i \sin(75^\circ + 15^\circ) = \cos 90^\circ + i \sin 90^\circ = i =$ 右边, \therefore 原等式成立.

$$\begin{aligned}
 & (2) \text{ 左边} = [\cos(-3\theta) + i \sin(-3\theta)] \cdot \\
 & [\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)] \\
 & = \cos [(-3\theta) + (-2\theta)] + \\
 & i \sin [(-3\theta) + (-2\theta)] \\
 & = \cos(-5\theta) + i \sin(-5\theta) \\
 & = \cos 5\theta - i \sin 5\theta, \therefore \text{原等式成立.}
 \end{aligned}$$

11. D 【解析】 $\because e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$

$$\therefore e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i. \text{ 又}$$

$$\because i^{2021} = i, \therefore \text{复数 } z = \sqrt{2} + (\sqrt{2} - 1)i,$$

$$\therefore \bar{z} = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1)i, \text{ 则 } \bar{z} \text{ 的虚部为 } 1 - \sqrt{2}. \text{ 故选 D.}$$

12. AC 【解析】 对于 A 选项, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, 则 $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$, 可得 $|z^2| = |r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)| = r^2$, $|z|^2 = |r(\cos \theta + i \sin \theta)|^2 = r^2$, A 选项正确;

对于 B 选项, 当 $r = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $z^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, B 选项错误;

对于 C 选项, 当 $r = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$ 时, $z =$

$$\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ 则 } \bar{z} = \frac{1}{2} -$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ C 选项正确;}$$

对于 D 选项, $z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n =$

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4},$$

取 $n = 4$, 则 n 为偶数,

$z^4 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$, 不是纯虚数, D 选项错误.